Dr. Martin Friesen & Jonas Kremer SS 2018

Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 2

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

(a) Finden Sie zwei σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, so dass

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 := \{A_1 \cup A_2 \,:\, A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ und } A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

keine σ-Algebra ist;

(b) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $A \backslash B \in \mathcal{A}$ und $A \triangle B := (A\backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 2 *(6 Punkte)*
Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \sigma(\{\omega\} \,:\, \omega \in \Omega)$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \,:\, A \text{ ist abzählbar oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

(b) Sei $\mu : \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar,} \\ 1, & \text{falls } A^c \text{ abzählbar.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ ein Maß ist.

Aufgabe 3 *(6 Punkte)*
Sei $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$. Für festes $\omega_0 \in \Omega$ definiere $\delta_{\omega_0} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, 1]$ durch

$$\delta_{\omega_0} := \begin{cases} 1, & \text{für } \omega_0 \in A, \\ 0, & \text{für } \omega_0 \notin A^c. \end{cases} \tag{1}$$

Seien $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ und $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \delta_{\omega_n}$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ definiert. Zeigen Sie, dass die Bernoulli-, Binomial-, geometrische und Poisson-Verteilung als Maße der Form (1) aufgefasst werden können.